WAVELETS: TEORIA E APLICAÇÕES

Regis Rossi Alves Faria

Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
LSI - Laboratório de Sistemas Integráveis
Div. de Sist. Digitais - Grupo de Computação Gráfica
Av. Prof. Luciano Gualberto, travessa 3, n.158
05508-900 - São Paulo, SP, Brasil
e-mail: regis@lsi.usp.br

São Paulo - 1994

Abstract

This text presents the concepts and foundations of the Wavelet Theory, introducing the subject using the Analysis and Synthesis techniques approach, and Filter Banks theory approach. It is shown the advantages of using the Wavelet Transform as alternative to some Fourier techniques, as the Shor Time Fourier Transform (STFT). Applications areas are described, and 3 important applications for Wavelets are addressed in more details: the multiresolution analysis, data compression, and music analysis and synthesis. The current state in wavelet usage and future perspectives are discussed at the end.

Sumário

1- Introdução 3

2- Motivação 4

3- O que são Wavelets? 5

4- Histórico 7

5- A Transformada Wavelet (TW) 8

5.1- Transformada Wavelet X Transformada de Fourier 11

6- Potencial de Aplicações 13

6.1- Alternativa à Transformada de Fourier em Tempo Restrito (STFT - *Short Time Fourier Transform*) 13

6.2- Exemplo de Aplicações 15

7- Aplicações: Estudo de alguns Exemplos 16

7.1- Análise em Multiresolução 16

7.2- Compressão de Dados 19

7.3- Síntese de Música 20

8- Perspectivas Futuras 22

9- Bibliografia 23

1- Introdução

O processamento de sinal é hoje uma necessidade em qualquer área do conhecimento humano. Nas áreas exatas esta constatação é óbvia, e o processamento de sinais já era uma realidade desde os primórdios dos sistemas analógicos. Nas áreas biológicas a necessidade de se extrair informações valiosas sobre processos fisiológicos, através de seus sinais vitais, leva à necessidade de se empregar técnicas sofisticadas para processá-los e compreendê-los. Nas áreas humanas, a abordagem de imagens, sons, poesias, comportamentos e percepções vistos como processos organizados, coerentes, representáveis portanto sob a ótica de sinais, traz consigo a necessidade de se lançar mão do processamento de sinais para auxiliar no processo de reorganizar a informação e também no processo de criação, composição. Visto assim, o processamento de sinais é uma ferramenta vital no nosso mundo moderno, cuja demanda é crescente.

O processamento digital de sinais traz várias vantagens em relação ao analógico. Isto porque a manipulação de um sinal discretizado é realizada através de algoritmos computacionais, i.e. por software, dispensando a necessidade de uma infinidade de módulos físicos (hardware), bancos de filtros, etc. Além disso, a precisão alcançada no processamento é superior à analógica, e o processamento algorítmico relativamente mais simples de se modelar e compreender.

Várias técnicas e métodos de processamento digital de sinais existem e são aperfeiçoadas dia a dia, sempre buscando-se ganhos em velocidade, precisão, simplicidade e poder de processamento. Frequentemente, também, novas técnicas são introduzidas como alternativas melhores para determinados tipos de sinais e aplicações. O quadro geral é, portanto, altamente dinâmico e evolucionista.

Neste sentido, a Transformada Wavelet faz parte de uma teoria relativamente nova, e tem se revelado uma ferramenta poderosa e vantajosa no processamento e análise de sinais para inúmeras aplicações. E mais: por ser relativamente nova, há ainda um campo vasto para exploração e experimentação, até que se firme como uma ferramenta clássica.

O presente trabalho constitue-se num texto introdutório à teoria Wavelet.

Inicialmente comenta-se as motivações existentes em se explorar este campo. Em seguida procura-se saciar a curiosidade do leitor respondendo à questão “o que são wavelets?”, através de definições e exemplos.

Traça-se, então, um breve histórico, abrangendo desde o surgimento da teoria, a consolidação das bases matemáticas e a conquista das comunidades de processamento de sinal, até a atualidade.

No item seguinte, define-se a transformada Wavelet (TW), e introduz-se o tema abordando-o através da técnica de análise e síntese e através da teoria de bancos de filtros. Faz-se uma análise comparativa entre a transformada de Fourier (TF) e a transformada Wavelet, destacando as vantagens no uso da TW. Através de um exemplo, mostra-se também as vantagens computacionais dos algoritmos para a TW em relação aos algoritmos para a TF.

Na sequência, demonstra-se as vantagens de se usar a TW em substituição à *Short Time Fourier Transform* (STFT), e enumera-se diversas outras aplicações. Destas, 3 são analisadas mais cuidadosamente: a análise em multiresolução, a compressão de dados (uma aplicação que atraiu o interesse das comunidades de processamento de sinal e imagens, ocasionando uma explosão no número de pesquisas e trabalhos na área), e a síntese de música, onde as wavelets encontram um amplo campo de explorações interessantes.

No final avalia-se brevemente o emprego de wavelets na atualidade: os grupos de interesse, o uso da TW na compressão de imagens, as possibilidades e perspectivas futuras.

2- Motivação

Um sinal pode ser uni/bi/n-dimensional, ser periódico ou não, e através de suas características pode-se extrair informações relevantes sobre o processo a que ele está associado. Esta informações podem ser extraídas tanto no domínio do tempo (ou dimensão física) ou no da frequência.

Uma ferramenta hoje clássica na análise de sinais é a Transformada de Fourier (TF) que permite a "visualização" do sinal (transformado) sob uma outra ótica, uma dimensão alternativa. Assim a TF permite mapear um sinal (por exemplo) s(t), descrito no domínio do tempo (ou s(x), x uma dimensão métrica) num sinal S(f), descrito no domínio da frequência.

Um sinal pode ser analisado portanto em vários domínios, sendo os mais comuns o temporal, métrico e frequencial. Existem uma variedade de transformadas matemáticas além da de Fourier que são empregadas no mapeamento de funções de um domínio para outro. As transformações são particularmente importantes em processamento e análise de sinais porque no domínio transformado algumas propriedades relevantes do sinal ficam mais evidentes.

A Transformada de Fourier permite a análise em tempo-frequência. A transformada Wavelet (TW), como veremos adiante, possibilita visualizar um sinal em diversas escalas diferentes, introduzindo assim a análise em tempo-escala. Esta propriedade intrínseca à TW a torna particularmente atraente para aplicações de análise em multiresolução.

A medida em que forem sendo apresentadas certas propriedades da TW ficarão mais evidentes as vantagens de se utilizá-la, em especial nos casos onde a TF não apresenta bons resultados.

As principais motivações para se pesquisar wavelets são:

- A possibilidade de se explorar novos campos e aplicações e resolver problemas onde as técnicas convencionais não apresentam bons resultados
- A possibilidade de reproduzir e criar novos sons e texturas sônicas inéditas através da técnica de análise-síntese (aplicações em computação musical, música digital)
- A possibilidade de se desenvolver compressores de dados com altas taxas de compressão, em tempo real (aplicações em processamento de imagens)
- A simplicidade e velocidade dos algoritmos de implementação.

3- O que são Wavelets?

Em poucas palavras: são um conjunto de funções-base obtidas de uma função protótipo (wavelet mãe) por meio de dilatações (contrações) e deslocamentos (shifts).

Na figura 1 (veja abaixo) mostra-se um exemplo de uma wavelet-mãe (a), uma versão escalada (b) e uma versão escalada e deslocada (c). A wavelet da figura 1 é uma wavelet de Morlet, cuja primitiva é a função $h(t) = e^{-\alpha t^2} . e^{jwt}$, i.e., uma gaussiana modulada. A forma geral de uma "família" de wavelets é portanto

$$h_{a,b}(t) = \frac{1}{\sqrt{a}} h(\frac{t-b}{a}) \qquad \text{- (1)}$$

onde h(t) é a wavelet primitiva ou mãe.

O item 5 (A Transformada Wavelet), adiante, apresentará a operação matemática Transformada Wavelet nas quais as funções wavelets exercem papel de funções base, assim como, analogamente, na Transformada de Fourier as exponenciais complexas (e^{jwt}) exercem esse papel.

Tipos de Wavelets

Existem vários tipos de wavelets citados na literatura. O uso de uma ou outra está associado à aplicação. Regras de construção de wavelets estão sendo propostas por vários pesquisadores, segundo as restrições e necessidades que cada aplicação específica impõe. Isto nos leva a concluir que podemos gerar uma infinidade de wavelets diferentes, e particularmente construir um conjunto de wavelets adequado ao processamento de um tipo de sinal ou aplicação específica, levando à obtenção de resultados melhores.

Fig. 1 - Exemplo de uma Wavelet

a) Wavelet mãe
$h(t) = e^{-\alpha t^2} . e^{jwt}$

b) wavelet escalada
h(t/*a*), *a*=2.0.

c) wavelet escalada e deslocada
$h(\frac{t-b}{a})$, *a*=2, *b*=0.5

Condição de Admissibilidade

Para uma função ser considerada uma wavelet ela deve ser admissível. Uma função $h(t) \in L^2$ (**R**) é admissível se:

$$C_g = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{|H(w)|^2}{|w|} dw < \infty \qquad \text{- (2)}$$

onde H(w) é a transformada de Fourier de h(t) e L^2 (**R**) é o conjunto de todos os sinais integráveis quadraticamente (i.e., de energia finita). C_g é a constante de admissibilidade. A principal motivação em impor que C_g seja finita é que isto é condição para que a integral da transformada inversa convirja, i.e., a operação anti-transformada só será possível se

$$C_g < \infty.$$

Para uma dada g(t), contínua na vizinhança da origem, a condição $C_g < \infty$ implica que H(0)= 0 , ou, equivalentemente, que $\int_{-\infty}^{+\infty} h(t)\,dt = 0$, isto é , h(t) não possui componente contínua (DC).

Outro exemplo de uma wavelet é considerado na figura 2: a Wavelet de Haar. Mostra-se graficamente as operações essenciais de contração e deslocamento iniciais gerando w(2x) e w(2x-1). O próximo nível contém w(4x), w(4x-1), w(4x-2) e w(4x-3), de onde exprimimos a forma geral desta família

$$W_{j,k}(x) = W(2^j x - k), \quad j,k \in \mathbf{Z} \quad \text{- (3)}$$

Estas funções são contínuas por partes e constituem uma base para L^2 (**R**). Mais: o produto interno

$$\int_{-\infty}^{+\infty} W(x).W(2x-k)dx = 0 \qquad \text{- (4),}$$

isto é, as translações e deslocamentos de W são mutuamente ortogonais para todos os j e k.
Recorde que as funções base na Trasformada de Fourier (e^{jwt}) também formam uma base ortogonal em L^2 (**R**). Mais adiante as vantagens desta propriedade ficarão mais evidentes.

Na figura 3 (abaixo) ilustra-se um tipo de wavelets de Daubechies (que levam o nome de seu construtor) e um exemplo de wavelets biortogonais (uma modalidade mais recente de wavelets).

Fig. 2 - Wavelet de Haar

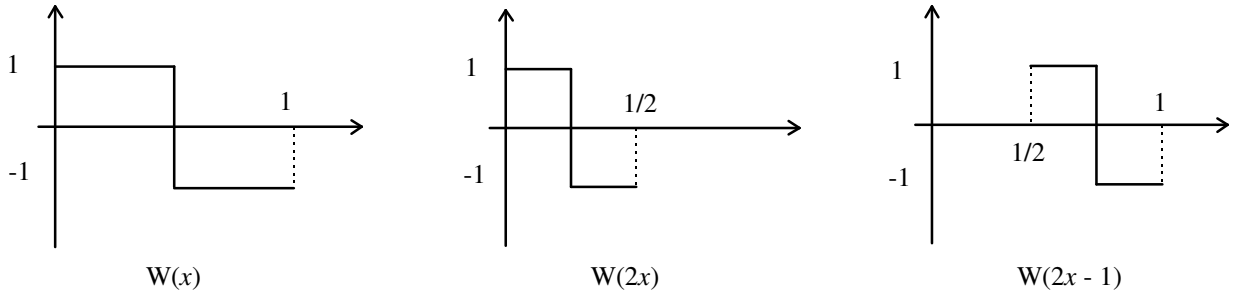


Fig. 3 - Exemplos de Wavelets

Wavelets de Daubechies

Wavelets Biortogonais

4- Histórico

A teoria Wavelet se baseia em representar funções genéricas em termos de "**blocos construtivos" básicos**, fixos em diferentes **escalas**[1] e **posições**.

A idéia de se **focalizar um sinal** sob várias **escalas diferentes** e analisá-lo com **várias resoluções** surgiu **independentemente** em várias áreas de matemática, física e engenharia.

Esta abordagem é útil em diversas áreas diferentes, por exemplo em técnicas de filtragem QMF (*Quadrature Mirror Filtering*), esquemas piramidais, teoria dos estados coerentes, etc [JAW94]. A teoria Wavelet representa hoje um corpo sintético destas teorias, unificando-as sob um mesmo "*framework*".

Os primórdios remontam aos **anos 50** quando matemáticos perceberam que as técnicas de Fourier não eram muito adequadas para solução de muitos problemas e recorreram às chamadas **técnicas de Littlewood-Paley**, frequentemente substitutas eficientes (estas técnicas surgiram inicialmente nos anos 30). Desenvolvidas nos anos 50 e 60, deram origem a poderosas **ferramentas matemáticas** para **solucionarem equações diferenciais parciais** e **equações integrais**, e que se revelaram afim com a **teoria de Calderón-Zygmund**, uma área de **análise harmônica**.

Nos inícios dos **anos 80** Strömberg descobriu as **primeiras wavelets** ortogonais. Em 1982, o geofísico Jean Morlet lançou mão das wavelets em seus trabalhos em **geoexploração**. Alex **Grossman** (físico teórico), **Morlet** e Yves **Meyer** (matemático) estudaram a transformada Wavelet e perceberam que as técnicas da teoria de Calderón-Zygmund, em particular as representações de Littlewood-Paley, poderiam levar a uma **concepção unificada** de muitos resultados da análise harmônica, e mais: que poderiam substituir as séries de Fourier em aplicações numéricas.

Daí construíram as **bases matemáticas** da **teoria Wavelet**, com ênfase nas **representações de sinais por "blocos construtivos".** Grossman e Morlet sugeriram o nome ***wavelet*** para os blocos construtivos, e o que antes se chamava teoria de Littlewood-Paley, passou-se a denominar Teoria Wavelet [JAW94].

A atenção da comunidade de **Processamento de Sinais** foi atraída para a área quando Stéphan **Mallat** e Yves **Meyer**, introduzindo a noção de **análise em multiresolução**, estabeleceram as **conexões** com **outras técnicas de processamento de sinais**. Na sequência, Ingrid **Daubechies** construiu uma **família de wavelets** de funções não nulas somente em um intervalo finito, e com regularidade fixa.

Desde então o número de contribuições teóricas e práticas à essa teoria cresceu substancialmente, e o assunto continua em **ampla evolução**.

[1] Aqui a noção de escala é introduzida e levará à representação em tempo-escala, alternativamente à tempo-frequência (como na Transf. Fourier).

5- A Transformada Wavelet (TW)

Análise e Síntese

Uma forma de introduzir a TW é através da noção de **análise e síntese** utilizando funções básicas. Na análise, um sinal x(t) é decomposto sobre uma base ortogonal de funções básicas.

Na transformada Wavelet estas funções base são as wavelets dilatadas e transladadas $h_{a,b}(t)$ (**1**), a e $b \in \mathbf{R}$, $a \neq 0$.

A operação transformada pode então ser definida por:

$$W_x(a,b) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t).h^*_{a,b}(t)\,dt \qquad \text{- (5)}$$

Esta é a forma da Transformada Wavelet Contínua (TWC). A operação em (5) pode ser interpretada como o produto interno do sinal x(t), que queremos analisar, com a família de wavelets $h^*_{a,b}(t)$:

$$W_x(a,b) = \langle x(t), h^*_{a,b}(t) \rangle \qquad \text{- (6)}$$

O produto interno nos fornece uma medida da similaridade entre os sinais operados, sendo frequentemente usado em problemas de estimação e deteção - como por exemplo em estimativa de localização e velocidade de alvos em radar e sonar.

O parâmetro ***a*** é denominado fator de escalamento, e ***b***, fator de deslocamento. Como todas as wavelets derivam de um mesmo protótipo h(t), nenhuma escala específica é privilegiada na análise. A transformada $W_x(a,b)$ pode ser representada graficamente num plano 2D, onde ***a*** será o representativo da escala/frequência e ***b*** a dimensão temporal.

Banco de Filtros

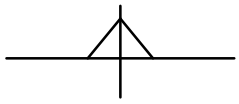
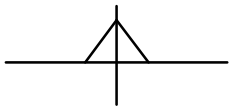
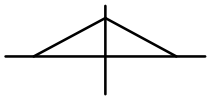
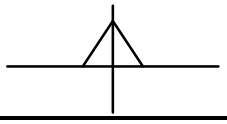
Uma outra visão alternativa da TW é baseada na interpretação de **bancos de filtros**. A trasnformada em (5) pode ser reescrita como

$$W_x(a,b) = \sqrt{a}.\int_{-\infty}^{+\infty} x(at).h^*(t-b/a)\,dt \qquad \text{- (7)}$$

Em (5), quando a escala cresce (***a*** maior), a resposta ao impulso do $h(\frac{t-b}{a})$ se alarga no tempo e portanto perfaz uma análise sobre um intervalo de tempo maior. Equivalentemente, em (7), quando a escala cresce o sinal x(at) é visto através de um filtro de comprimento constante (veja figura 4 adiante). Assim o parâmetro ***a*** tem a mesma interpretação de escala para mapas: escalas largas significam visão global, enquanto escalas menores mostram visões mais detalhadas.

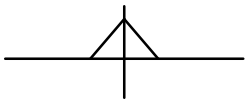
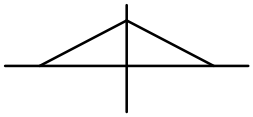
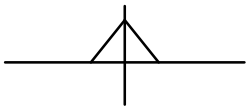
Figura 4 - Escalamento dos sinais na interpretação da TW como banco de filtros

Para a eq. (5):

Escala (***a***)	$h(\frac{t-b}{a})$	**x**(t)
a = 1		
a > 1 (escala **maior**)		

☞ **Visão Global** - Análise sobre intervalo de tempo **maior**.

Para a eq. (7):

Escala (***a***)	**h**(t - *b*/*a*)	**x**(***a***.t)
a = 1		
a > 1 (escala **maior**)		

☞ Visão **Global**: análise do sinal **x**(t) **contraído**

A transformação é uma operação linear. Porém, como veremos adiante, quando a confrontamos com a Transformada de Fourier a análise em frequência tem uma cobertura logarítmica. O banco de filtros de análise aqui é composto de filtros passa-banda com largura de banda relativa constante, isto é,

$$\Delta f / f = const. \qquad \text{- (8)}$$

Em outras palavras, ao invés da resposta em frequência do filtro ser regularmente espaçada no eixo da frequência, ela é espalhada numa escala logaritmica (veja figura 5). Bancos de filtros com esta propriedade são usados no modelamento da resposta da cóclea, situada no ouvido interno, e portanto é adaptado ao sistema de percepção auditorial, por exemplo, de música -filtros que satisfazem $\Delta f/f$=const. são naturalmente distribuídos em oitavas.

Fig. 5 - Banco de Filtros Passabanda

O processo de análise resulta portanto num conjunto de coeficientes wavelets (W_x *(a,b)*) que exprimem a "proximidade" ou similaridade do sinal original em relação àquelas funções base. Se podemos representar qualquer sinal genérico como uma decomposição em wavelets, então é natural que queiramos recuperar a forma de onda original somando blocos construtivos elementares.

A síntese de x(t) a partir de W_x *(a,b),* isto é, sua reconstrução, consiste na soma de todas as projeções (ortogonais) do sinal decomposto. Isto pode ser equacionado como abaixo:

$$x(t) = 1/C_g . \iint W_x(a,b).h_{a,b}(t).\frac{dadb}{a^2} \qquad \text{- (9)}$$

Transformada Discreta

Formalmente a família de wavelets $h_{a,b}(t)$ na transformada contínua não constitue verdadeiramente uma base ortogonal, haja visto que os parâmetros ***a*** e ***b*** variam continuamente, e, portanto, a base é essencialmente redundante. Dizemos que as wavelets $h_{a,b}(t)$ comportam-se, na prática, como uma base ortogonal [RIO 91].

A fórmula de reconstrução (9) é satisfeita somente impondo-se a exigência de que h(t) seja de energia finita e passa-banda (o que implica na sua oscilação no tempo como uma onda curta, e sua limitação também no domínio da frequência). Em outras palavras, a condição de admissibilidade (2) deve valer.

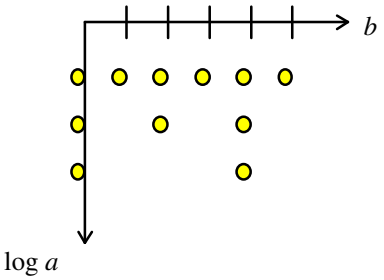
Naturalmente desejamos estender os conceitos para o caso discreto. É possível discretizar (amostrar) os parâmetros de escala-tempo ***a*** e ***b*** apropriadamente de forma que as funções $h_{a,b}(t)$ constituam uma base ortonormal real -a escolha da wavelet mãe h(t) é o fator chave para a obtenção desta base ortonormal.

Para que a decomposição (transformada) e a reconstrução (anti-transformada) "funcionem" corretamente, há um compromisso entre a densidade na amostragem de ***a*** e ***b*** (redundância) e restrições impostas sobre as funções base: se optarmos por uma amostragem densa (redundante) de a e b, somente "restrições leves" se aplicarão a $h_{a,b}(t)$; ao passo que, se a redundância é mínima (amostragem crítica) as funções $h_{a,b}(t)$ sofrem restrições.

Amostragem de ***a*** e ***b***	**Restrições** sobre $h_{j,k}(t)$
alta taxa (redundância)	baixa
baixa taxa (amostragem crítica)	alta

Uma maneira natural de se discretizar os parâmetros escala-tempo (a e b) é ilustrado na grade de amostragem da figura 6 abaixo:

Fig. 6 - Grade Diádica
($a_0 = 2$)



Para este exemplo, temos $a = a_0^{\,j}$ e $b = k.a_0^{\,j}.T$, j e k ∈ **Z**. As wavelets geradas são:

$$h_{j,k}(t) = a_0^{-j/2}.h(a_0^{-j}.t - k.T) \qquad \text{- (10)}$$

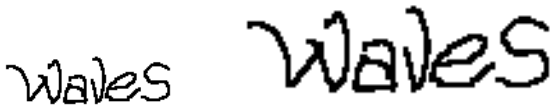
de onde obtemos os coeficientes (discretos) wavelets

$$C_{j,k} = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t).h^*_{j,k}(t)dt \qquad - (11)$$

As wavelets $h_{j,k}(t)$ constituem uma base ortogonal se todas elas são necessárias para reconstruir o sinal.

Conceito de Magnificação

Fazemos uma analogia a um microscópio. Se a magnificação corrente é $a = a_0$, e desejamos ver detalhes menores, aumentamos a magnificação para $a = a_0^j$, j negativo. Para j's negativos e grandes $a_0^j.T$ corresponderá a passos pequenos, varrendo os pequenos detalhes.



a_0 $\qquad$ $a = a_0^j$ $\qquad$ j negativo e grande

$b = k.a_0^j.T$ pequenos passos ↓

escala **original** $\qquad$ escala **menor** (**Magnificação**) $\qquad$ varre detalhes

O problema da reconstrução é escolher a_0 , T e h(t) tais que

$$x(t) = c.\sum_j \sum_k C_{j,k}.h_{j,k}(t) \qquad - (12)$$

Se $a_0 \approx 1$ e T é pequeno o bastante (amostragem redundante) então o conjunto $h_{j,k}(t)$ se torna redundante e a reconstrução não impõe restrições severas à h(t). Se, por outro lado, a amostragem for esparsa, por exemplo por oitavas ($a_0 = 2$), $h_{j,k}(t)$ formará um conjunto ortogonal somente para algumas escolhas de h(t), a wavelet mãe.

5.1- Transformada Wavelet X Transformada de Fourier

A Transformada de Fourier é uma ferramenta amplamente difundida e utilizada em processamento de sinais. Derivada dos estudos de séries de Fourier, a transformada de Fourier pode ser definida por

$$X(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t).e^{-j2\pi.ft}dt \qquad - (13)$$

ou seja, um produto interno do sinal x(t) com um conjunto de exponenciais complexas, que vêm a consistir uma base ortonormal.Em resumo, a TF decompõe um sinal x(t) em uma soma infinita de senos e cossenos.

A TF formalmente se aplica a sinais periódicos (ou quase periódicos), cujas propriedades não se modificam no tempo (processos estacionários). A análise por Fourier trabalha melhor quando x(t) é composto de uns poucos componentes estacionários (senos/cossenos). Singularidades e mudanças abruptas em x(t) se revelam espalhadas por todo o espectro de frequência. Este suporte global é a principal desvantagem da TF: para representar uma função x(t) localizada no tempo, esta base global requer extremo cancelamento de muitos termos da série de Fourier de x(t), o que implica em alto custo computacional para se obter uma precisão razoável.

Uma análise adaptada a sinais não estacionários requer mais que a TF. A Transformada Wavelet provê o suporte local necessário para analisar x(t) sem as desvantagens da TF.

Uma outra vantagem da TW em relação a TF consiste num custo computacional menor para implementar a Transformada Rápida Wavelet -em analogia à Transformada Rápida de Fourier (FFT - *Fast Fourier Transform*).

Um sinal f(t) pode ser recuperado de uma matriz de coeficientes C_w (usando a TW), assim como de uma matriz de coeficientes de Fourier C_F (usando a TF)

$$f = W.\ C_w$$
$$f = F.\ C_F \qquad \text{- (14)}$$

onde W e F são matrizes que estabelecem a conexão entre f(t) e os coeficientes Wavelet (C_w) e de Fourier (C_F), respectivamente.

A matriz de Fourier F é cheia -não possui entradas nulas. Suponha que queiramos calcular f(t) em n pontos ($t = 2\pi.u/n$) por meio de uma série $\sum_{k=0}^{n-1} C_F(k).e^{jkt}$ de n pontos (uma transformada de Fourier inversa discreta). Multiplicar F_{nXn} por um vetor $C_{F\,(n)}$ requer n^2 multiplicações. Se n = 1024 pontos, o custo computacional fica alto (serão 1024^2 = 1.048.576 multiplicações complexas).

Se fizermos o mesmo utilizando agora uma matriz W_{nXn} e coeficientes Wavelets C_w notaremos que a matriz W é esparsa -muitas de suas entradas são nulas. Suponha que $n = 2^l$, o número total de entradas não nulas (neste exemplo) será $n(l+1)$. Isto mostra o efeito simplificador de se utilizar uma base mais local. O número de multiplicações em $W.C_w$ é de $n(l+1) = n(\log_2 n + 1)$. Se n = 1024, serão 11.264 multiplicações, um custo computacional moderado.

Ambas as multiplicações matriciais podem ser feitas mais rapidamente utilizando os algoritmos de transformada rápida: FFT (*Fast Fourier Transform*) e FWT (*Fast Wavelet Transform*). O custo computacional para a FFT cai de n^2 para $\frac{1}{2}.n.l$ através de uma simples reorganização dos passos -que efetivamente consiste numa fatoração da matriz de Fourier F_{nXn}. Se n = 1024, o custo cai de (1024)(1024) para (5)(1024) (mais de 200 vezes).

Para a FWT o custo cai da ordem de (n.log n) para a ordem de (n). O custo para cada passo sucessivo é a metade do anterior, ou seja, o fator total do custo (igual a C+C/2+C/4+...) é limitado a 2C, onde C é o custo inicial (primeiro passo).

O esquema de fatoração das matrizes consiste no desdobramento de W (e F) em 3 matrizes mais esparsas, e com propriedades construtivas específicas.

$$W = W_1.W_2.W_3$$
$$F = F_1.F_2.F_3 \qquad \text{- (15)}$$

Esta fatoração vem a ser a forma matricial do algoritmo piramidal (que veremos adiante) e permite uma redução substancial no número de multiplicações envolvidas.

6- Potencial de Aplicações

6.1- Alternativa à Transformada de Fourier em Tempo Restrito (STFT - *Short Time Fourier Transform*)

A STFT é a abordagem usual para análise de sinais não estacionários. Para se conseguir melhor precisão no tempo precisa-se de uma representação S(t,f) do sinal x(t), para que se possa analisar seu espectro em regiões localizadas no domínio do tempo. A STFT (também conhecida por transformada de Fourier de um sinal enjanelado no tempo) pode ser definida por

$$\boxed{STFT(\tau,f) = \int x(t).g^{*}(t-\tau).e^{-j2\pi.f.t}\,dt} \qquad - (16)$$

onde g(t) é uma "janela temporal".

A STFT mapeia x(t) num sinal bidimensional STFT (t,f) (plano t X f), e carrega com si as propriedades da transformada de Fourier, mas a análise fica criticamente dependentemente da escolha da função g(t): a janela.

A STFT pode ser interpretada como uma sucessão de TF sobre um segmento ("enjanelado") do sinal x(t), ou como um banco de filtro modulado (filtros passa-banda cuja resposta ao impulso é a função janela).

Resolução

Uma desvantagem da STFT está na sua capacidade de resolver Δt e Δf. Por exemplo, 2 senóides f_1 e f_2 puras só serão discriminadas independentemente se $|f_2-f_1| \geq \Delta f$. O princípio de Incerteza de Heisemberg estabelece que

$$\boxed{\Delta t.\Delta f \geq 1/4\pi} \qquad - (17)$$

o que impõe um limite no poder de resolução de Δt e Δf. Se queremos uma alta resolução em f (Δf mínimo), perdemos resolução em t (Δt maior). Esta constatação é uma verdade em qualquer situação.

STFT: Resolução Fixa

O mais relevante aqui é o fato de que na STFT a resolução no espaço-tempo (Δt e Δf) é fixa para qualquer posição, tanto no eixo da frequência quanto no do tempo. Por exemplo, sinais de frequência diferentes são analisados com uma mesma resolução temporal. Um componente frequencial pode ser analisado ou com boa resolução Δt ou com boa resolução Δf, mas não com ambas.

TW: Resolução Variável

Esta limitação na resolução é resolvida utilizando-se a transformada Wavelet. O conceito de multiresolução é introduzido quando as resoluções Δt e Δf variam no plano espaço-tempo de forma a obtermos uma análise multiresolução. Quando a análise é vista como em banco de filtros, a resolução no tempo cresce com a frequência (central) do filtro. Assim impõe-se que Δf é proporcional a f:

$$\Delta f / f = const. \qquad - (8)$$

Desta forma Δt e Δf variam com a frequência central do filtro (passabanda). Satisfazendo ainda o princípio de Heisemberg, a resolução temporal Δt se torna melhor nas frequências altas enquanto a resolução Δf torna-se melhor nas baixas frequências. Na figura 7 vê-se as resoluções Δt e Δf no espaço tempo-frequência comparando STFT e TW.

Fig. 7 - Funções base (a)**, e Resolução da STFT (à esquerda) e TW no plano tempo-frequência** (b)

Fazendo a conexão destes conceitos de resolução variável com o conceito de escala na transformada Wavelet. Observamos que em escalas maiores (***a*** maior) analisamos o sinal x(t) globalmente, isto é, sem detalhes, logo com menor resolução temporal.

Se desejamos dar um *zoom* em x(t), reduzimos a escala (***a*** menor) e obtemos melhor resolução temporal (Δt). Na visão global (***a*** maior) a resolução em frequência é melhor (Δf pequeno), enquanto em escalas menores perdemos o poder de resolução em frequência (Δf grande). Este raciocínio sugere que a resposta em frequência dos bancos de filtros obedecem à relação

$$a = f_o/f \qquad \text{- (18)} \qquad \text{que se identifica com (8).}$$

Quanto maior o fator de escala a (larga escala, visão global), para uma frequência alta a resolução em frequência é também alta (e no tempo, baixa). As outras relações entre escala e resolução podem ser extraídas da relação (18) em conjunto com o princípio da incerteza, em (17). Na figura 8 ilustra-se graficamente as resoluções discutidas acima.

Espectrogramas e Escalogramas

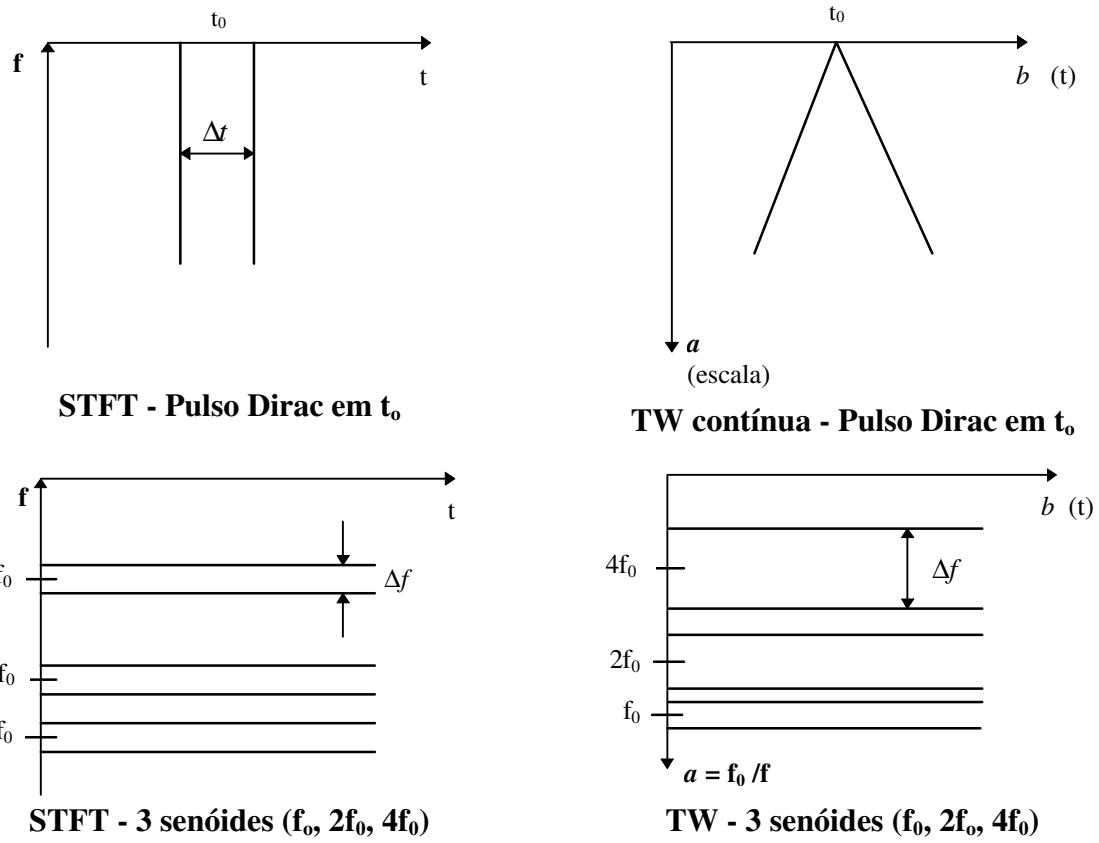
A representação gráfica do sinal transformado em um plano tempo-frequência constitue uma ferramenta de análise bastante útil. Para a STFT é frequentemente utilizado o espectrograma -que representa a distribuição da energia do sinal no plano tempo-frequência. Para o caso Wavelet, como a energia está associada ao módulo quadrático de $W_x(a,b)$

$$\boxed{\iint \left|W_x(a,b)\right|.\frac{dadb}{a^2}} \qquad \text{- (19)}$$

a distribuição da energia está associada a $\frac{dadb}{a^2}$. Define-se então o escalograma, onde a energia é representada num espaço a X b (escala-tempo).

Os gráficos na figura 8 são espectrogramas (para STFT) e escalogramas (para TW). Mais adiante outros escalogramas serão ilustrados. É interessante ressaltar que em muitos casos a representação da fase, ao invés do módulo, revela com mais evidência singularidades no sinal (aumentos repentinos, rajadas, etc.) [RIO91].

Fig. 8 - Espectrogramas (para STFT) **e Escalogramas** (para TW)



6.2- Exemplo de Aplicações

As propriedades até aqui ilustradas da transformada Wavelet (por exemplo, multiresolução, suporte local, velocidade de processamento, capacidade de reconstrução de sinal transformado, análise local, etc.) têm atraído a atenção de inúmeras áreas onde há processamentode sinais.

Citamos o interesse no processamento de banda-larga (Wideband processing). Técnicas modernas de radar e sonar de banda larga estimam os valores de atraso de tempo e tempo-escala correlacionando um sinal recebido com uma coleção de sinais atrasados e escalados do sinal transmitido. Em banda larga requer-se uma cobertura muito fina dos valores de atraso de tempo e escalas, e a transformada Wavelet é usada para implementar o processamento da correlação (requer-se a transformada Wavelet contínua). *Wideband processing*, apesar de estudado há muitos anos, estava restringido devido às dificuldades computacionais envolvidas. As vantagens computacionais oferecidas pela TW têm impulsionado novos estudos nesta área.

Em diversas outras áreas a transformada Wavelet está sendo aplicada e pesquisada:

- Reconhecimento de padrões
- Deteção de transientes e sinais abruptos (“bursts”)
- Solução de equações diferenciais parciais
- Processamento de sinais biomédicos (ECG, etc.)
- Deteção de bordas
- Análise em Multiresolução
- Compressão de dados
- Síntese e processamento de sinais acústicos: voz e música

As três últimas acima são examinadas a seguir.

7- Aplicações: Estudo de alguns Exemplos

Todos os exemplos a seguir resumem-se na aplicação básica da transformada: o processamento e análise de sinais, cujo objetivo é o de extrair informações relevantes de um sinal através de sua transformada, ou de aproveitar as facilidades de se operar sobre o sinal no domínio transformado.

7.1- Análise em Multiresolução

Para introduzir o conceito de multiresolução em conexão com a teoria Wavelet seguiremos 3 etapas:

1. O esquema Piramidal de Multiresolução
2. O esquema de Codificação Sub-banda
3. A Formulação Matemática Usual

O Esquema Piramidal de Multiresolução

Dada uma sequência original x(n), n ∈ **Z**, podemos gerar um sinal com uma resolução mais baixa simplesmente através de uma filtragem passa-baixa. Se subamostrarmos x(n) por um fator de 2 (redução da taxa de amostragem por 2) dobra-se a escala na análise. Estas operações resultam no sinal

$$y(n) = \sum_k g(k).\, x(2n - k) \qquad \text{- (20)}$$

onde g(k) é o filtro passa-baixa. Esta filtragem elimina os detalhes de alta frequência. Agora baseado em y(n) desejamos achar uma aproximação **a**(n) do sinal original. É óbvio que **a**(n) deve ser da mesma escala que x(n), então procedemos a uma superamostragem (aumento de taxa de amostragem) de y(n) por um fator 2 (o que incluirá zeros entre cada amostra). Após o "*upsampling*" uma filtragem por um filtro passa-baixas g'(k) irá preencher os valores nulos criados por meio de uma interpolação. Obtemos assim **a**(n):

$$a(n) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} g'(k).\, y'(n - k) \qquad \text{- (21)}$$

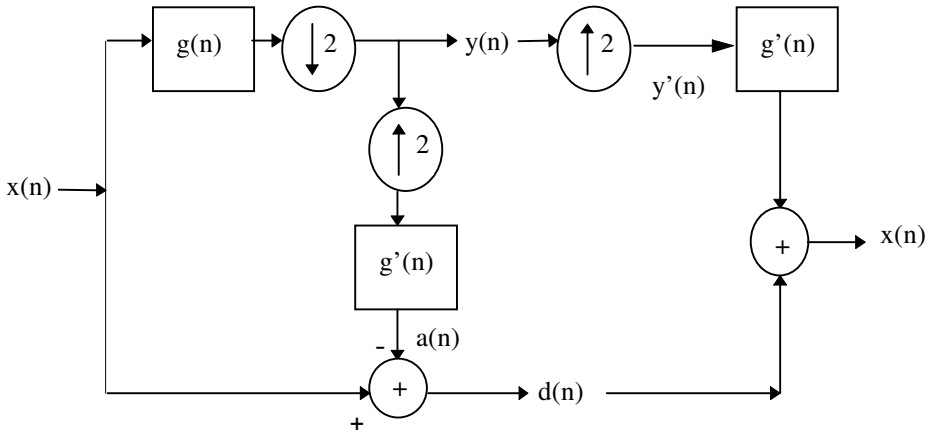
onde y'(n) = y(n/2), y'(n+1) = 0.

Se g(k) e g'(k) fossem filtros meia-banda ideais (com valor 1 entre $-\pi/2$ e $\pi/2$); **a**(n) seria uma aproximação meia-banda passa-baixa perfeita de x(n). Em geral isto não ocorre e

d(n) = x(n) - **a**(n) é a diferença necessária para **a**(n) se igualar a x(n).

x(n) então pode ser reconstruído adicionando **a**(n) e **d**(n). A figura 9 resume as operações descritas acima.

Fig. 9 - Esquema Piramidal



É intuitivo verificar que **d**(n) contém exatamente as frequências acima de π/2 de x(n), sendo portanto o "detalhe" necessário para a recuperação de x(n), como ilustrado na figura 9.

Esta separação de um sinal x(n) em uma aproximação com baixa resolução **a**(n) mais um detalhe adicional **d**(n) introduz conceitualmente a **análise de sinais em multiresolução**, usada em visão computacional.

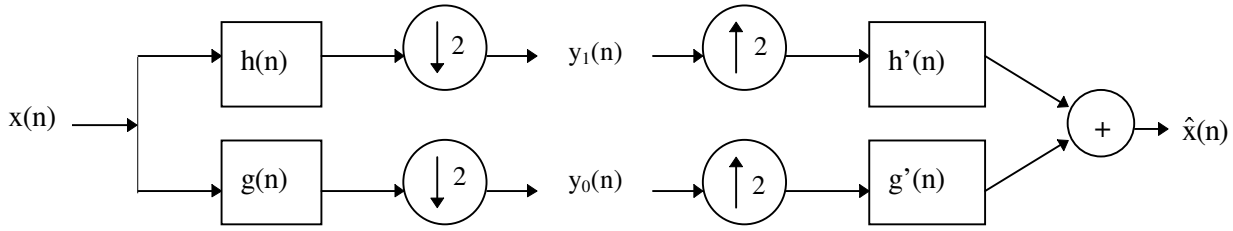
O esquema pode ser iterado em y(n) gerando uma cadeia de sinais de resolução menor em escalas maiores. Para imagens isto significa uma hierarquia de imagens cada vez menores. Este esquema iterado é chamado de piramidal. A figura 12, adiante, ilustra esta geração em cascata de sinais com resolução cada vez menores, sugerindo a noção de "pirâmide".

O Esquema de Codificação Sub-banda

O esquema de decomposição piramidal anterior apresenta a desvantagem de gerar, a cada etapa, um sinal com N amostras (mesma taxa de amostragem do sinal original) mais um sinal de N/2 amostras, aumentando em 50% o número de amostras em cada estágio[2].

O esquema de codificação sub-banda evita esta redundância. Nele um sinal x(n) é decomposto em um sinal y_0 (n) de menor resolução (filtrado passa-baixa) subamostrado (em escala maior) - exatamente como no esquema piramidal- mais um outro sinal y_1 (n) subamostrado (em escala maior) filtrado passa-alta de x(n) (usando um filtro h(n)), como ilustrado na figura 10

Fig. 10 - Esquema de Codificação Sub-banda



É intuitivo que o "detalhe" necessário para que a aproximação passa-baixa reconstrua o sinal original corresponde ao sinal passa-alta y_1 (n), isto é, sendo g(k) e h(k) filtros passa-baixa meia-banda e passa-alta meia-banda ideais, y_1 (n) e y_0 (n) constituem uma perfeita representação de x(n) em 2 versões subamostradas.

O sinal reconstruído x'(n) (veja figura 10) será igual a x(n) original se os filtros g(k) e h(k) obedecem a certas restrições, i.e., não é necessário que sejam ideais (impraticáveis). Para a reconstrução perfeita os filtros g(k) e h(k) são relacionados por

$$h(L-1-k) = (-1)^k g(k) \qquad \text{- (23)}$$

onde L é o comprimento do filtro (par).

Façamos agora uma conexão com a noção de decomposição em bases ortogonais

$$y_0(k) = \sum_n x(n).g(-n+2k)$$

$$y_1(k) = \sum_n x(n).h(-n+2k)$$

$$x(n) = \sum_k [y_0(k).g(-n+2k) + y_1(k).h(-n+2k)] \qquad \text{- (26)}$$

A expressão em (20) corresponde à expansão padrão de um sinal em uma base ortonormal (os filtros), onde a reconstrução é a soma das projeções ortogonais (y_1 (n) e y_0 (n)).

A formulação neste ponto é bastante sugestiva de como a teoria Wavelet encaixa-se neste esquema.

[2] Esta superamostragem pode ser evitada com uma escolha adequada de g(k) e g'(k), conforme comentado em [RIO 91].

Formulação Matemática Usual

Agora fica mais fácil introduzir a formulação matemática usual de análise em multiresolução.

Este conceito foi introduzido por Meyer e Mallat [RIO91]. Uma análise em L^2 (**R**) é definida por uma sequência de subespaços fechados $V_j \in L^2$ (**R**), $j \in$ **Z** com as seguintes propriedades:

1. ... $V_{-1} \subset V_0 \subset V_1 \subset V_2$ ...
2. $f(x) \in V_j \Rightarrow f(2x) \in V_{j+1}$
3. $f(x) \in V_j \Rightarrow f(x - 2^{-j}.k) \in V_j$
4. W_j é o complemento ortogonal de V_j em V_{j+1}, isto é

$$\mathbf{V_{j+1} = V_j \oplus W_j} \qquad \text{- (21)}$$

W_j contém o "detalhe" necessário para ir de V_j a V_{j+1}. Iterativamente (21) leva a

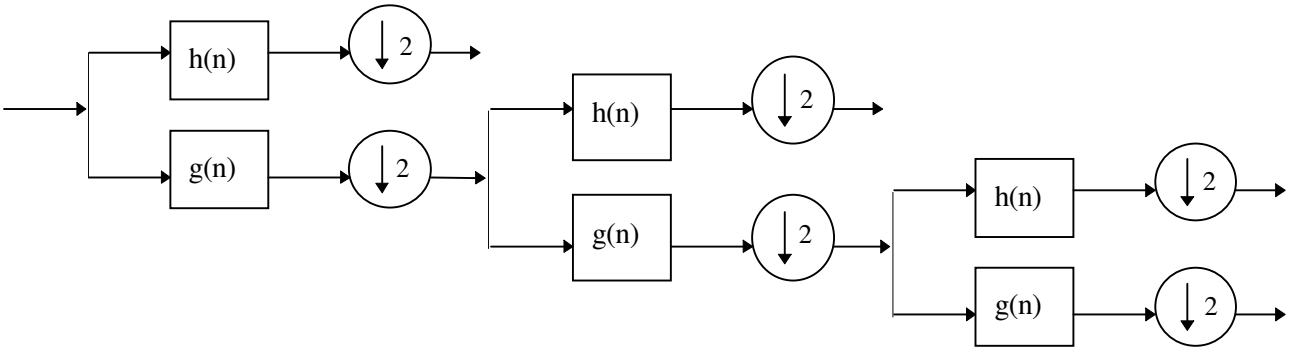
$$\mathbf{V_{j+1} = W_j \oplus W_{j-1} \oplus .....} \qquad \text{- (22)}$$

Esta relação pode ser vista na figura 11, onde vemos um subespaço decomposto em 2 outros subespaços, e assim por diante.

Fig. 11 - Análise em Multiresolução: Conjunto de Subespaços

A analogia com os esquemas piramidal e de codificação sub-banda é óbvia, e está ilustrada na figura 12. Nesta figura, a cada iteração a porção passa-alta (equivalente a W_j) corresponde à diferença entre a porção passa-baixa corrente (V_j) e a porção passa-baixa anterior (V_{j+1}). A figura 12 é obtida iterando-se a filtragem passa-baixa seguida de subamostragem por 2 sobre o sinal $y_0(n)$ da figura 10, produzindo uma "árvore de banco de filtros"[3]. Por exemplo: um sinal $x(n) \in V_3$ pode ser representado por uma decomposição em 2 sinais em menor resolução ($y_0 \in V_2$ e $y_1 \in W_2$).

Fig. 12 - Árvore de Banco de Filtros: Iteração do Esquema de Codificação Sub-banda



[3] Esta árvore nada mais é que um diagrama de blocos de uma Transformada Wavelet discreta implementada usando filtros discretos e subamostragem por 2. A cada etapa, reduz-se à metade a largura de banda do sinal, devido à subamostragem por 2. Se na primeira etapa consumimos C_0 operações, na etapa seguinte consumiremos $C_0/2$ operações (porque trabalharemos com N/2 amostras), e assim por diante, limitando o custo computacional a no máximo $2C_0$ operações (conforme dito no item 5)

Pode-se mostrar que há uma função $g_c(t)$ que forma uma base ortonormal em V_0 e pode ser escrita em termos de V_1:

$$g_c(t) = \sum_n g(n).g_c(2t-n) \qquad \text{- (23)}$$

Similarmente, é possível demonstrar que

$$h_c(t) = \sum_n h(n).g_c(2t-n) \qquad \text{- (24)}$$

Se h(n) e g(n) formam uma base ortonormal com respeito a seus deslocamentos, então pode-se mostrar que $h_c(t)$ forma uma base ortonormal para W_0. Devido à propriedade em (22), $h_c(t)$ e suas versões transladadas e escaladas formam uma **base wavelet**.

7.2- Compressão de Dados

Um dos maiores potenciais de aplicações de wavelets está na compressão de dados. A transformada Wavelet discreta pode ser interpretada essencialmente como um sistema de codificação sub-banda. Estes sistemas usualmente são usados para compressão de voz e imagens, logo é imediato o uso de wavelets para aplicações como compactadores.

Para compressão de dados há dois tipos básicos: com perdas e sem perdas. Consideraremos aqui compressão com perdas. Isto significa que temos de aceitar um erro que pode ser pequeno o bastante para não alterar a qualidade dos dados comprimidos.

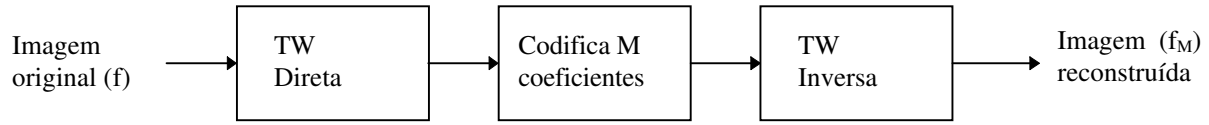
Por exemplo, suponha que queiramos comprimir uma imagem L x L pixels, em 256 tons de cinza (8 bits), isto é, uma função contínua por partes definida como abaixo

$$f(x,y) = P_{i,j} \in \mathbf{N}. \qquad \begin{matrix} i \le x < i+1, & 0 \le P_{i,j} \le 255 \\ j \le y < j+1, & 0 \le i,j < L \end{matrix}$$

O procedimento padrão é ilustrado na figura 13. Há muitas formas de se utilizar wavelets para propósitos de compressão. Um deles é considerar o problema como um problema de achar a melhor aproximação

$$f_M(x) = \sum_{j,k} C_{j,k}.h_{j,k}(x) \approx f \qquad \text{- (25)}$$

Fig. 13 - Compressão de Imagens: procedimento padrão



Uma boa razão para se utilizar wavelets é que cada wavelet "pega" informação sobre a imagem f essencialmente em um certo intervalo em uma dada escala: podemos gastar mais coeficientes onde a imagem possui maiores singularidades e descontinuidades, e menos onde ela possui transições suaves.

Na figura 14 mostra-se o histograma de uma imagem com 256 níveis de cinza. Aplicando-se uma transformada Wavelet ao histograma resulta no quadro ao lado. Claro que há uma escolha ideal da wavelet necessária para se extrair as características de borda, padrão e informação genérica da imagem para a obtenção de uma compressão "ótima". Veja que no histograma transformado os dados relevantes estão concentrados numa pequena faixa, podendo ser desprezados os picos menores sem muita perda de informação.

Estes procedimentos podem levar a taxas de compressão da ordem de 100:1.

Fig. 14 - Compressão de um Histograma de Imagem

7.3- Síntese de Música

A síntese digital de sons requer que se lance mão de um modelo generativo. Há cerca de 30 anos atrás, quando iniciaram as primeiras sínteses de som, foi estabelecido o primeiro modelo para sons musicais.

De acordo com este modelo, os sons musicais são periódicos (ou quase periódicos), a amplitude da onda varia segundo um envelope com 3 partes básicas: uma porção de ataque, um regime contínuo e um decaimento. Mais:

- O tom musical é determinado pela frequência da onda
- A intensidade (loudness) depende da amplitude ou energia da onda
- Diferentes formas de ondas periódicas correspondem a diferentes timbres
- A lei de Ohm acústica estabelece que o ouvido é insensível a relações de fase entre harmônicos de um som periódico, portanto
- O timbre é determinado só pelo espectro de frequência.

Este modelo no decorrer dos anos foi sendo aperfeiçoado. As técnicas de análise e síntese de sinal contribuíram enormemente para levantar as correlações entre os diversos parâmetros musicais, nos domínios do tempo e da frequência. Por exemplo: certamente os sons com diferentes espectros possuem diferentes timbres, mas não só o espectro determina o timbre: fatores temporais são importantes (por exemplo: não se reconhece um piano quando tocado de trás para frente num gravador de fita). O modelo tradicional falhava também ao nortear a síntese de sons: os sons produzidos eram sem identidade, desinteressantes. Imitar sons de instrumentos musicais levavam a resultados decepcionantes. Alguns timbres podiam ser a grosso modo imitados, mas alguns, como os do violino e trompete, resistiram aos esforços em imitá-los.

Pesquisas e estudos subsequentes utilizando técnicas de análise e síntese (a relevância da análise é provada na síntese) levaram ao entendimento de como o timbre dos instrumentos variava segundo outros parâmetros que não somente um envelope espectral que se move no eixo da frequência: no caso do trompete as análises de Fourier indicavam uma variação temporal na amplitude de cada harmônico. O espectro também variava durante o regime contínuo (*steady state*), e era bastante complexa sua evolução durante o ataque (veja figura 17 adiante). Entretanto, uma característica marcante descoberta foi a relação do brilho (maior intensidade de harmônicas mais altas) com a intensidade crescente numa nota ("*crescendo*").

No caso do violino, verificou-se que o timbre, a riquesa espectral e a variabilidade são determinados pela resposta em frequência da caixa ressonante do instrumento, que portanto age como um banco de filtros. A síntese subtrativa produziu bons resultados na imitação de violinos.

O vibrato, ingrediente importante no violino clássico, pode ser sintetizado utilizando-se uma modulação em frequência (FM) em torno de 6 Hz. O *Chorus* pode ser conseguido com uma modulação em amplitude. Adicionando um som a ele mesmo defasado em aproximadamente 1 ms gera um "colorido" espectral especial.

As técnicas baseadas na transformada de Fourier permitiram portanto um avanço significativo na área da computação musical, processamento digital de sons, análise e síntese. Os senos e cossenos se tornaram os blocos construtivos elementares mais populares na música computacional.

A chegada da teoria Wavelet, e sua transformada, onde os “blocos construtivos elementares” podem ser criados segundo as necessidades e desejos do usuário, traz novas possibilidades ao campo musical.

As vantagens começam onde as desvantagens da Transformada de Fourier “falam alto”:

- A TF é válida para sinais periódicos
- para sinais não periódicos a FT generaliza a expansão em termos de senóides
- se limitarmos o espectro enfrentamos o fenômeno de Gibbs
- a TF não mostra de uma maneira clara a evolução do sinal no tempo (esta informação fica “criptografada” no espectro de fase)

Os esforços para se usar funções básicas limitadas no tempo e na frequência levaram Gabor a propor uma expansão em termos de senóides de frequências variáveis “enjaneladas” por um envelope gaussiano de extensão finita, o que veio a constituir as bases da síntese granular [RIS88].

Outras transformadas também foram testadas no campo musical: a de Walsh-Hadamard, que apesar de fácil implementação com circuitos digitais, mostra-se inadequada para sons: tende a gerar espectros muito ricos e a expansão precisa de um número tremendo de termos para aproximar o som de uma flauta, por exemplo. A transformada de Karhunen-Loève mostrou-se adequada para redução do tempo de computação para síntese aditiva (conforme Stapleton & Bass, 1988, segundo [RIS88]).

O processo de análise e síntese provê um “insight” na compreensão das identidades sonoras e frequentemente leva a representações reveladoras. Além disso, pode levar à redução da quantidade de informação (compressão de dados) e a um aspecto mais interessante: a possibilidade de produzir variantes, modificar sons. Por exemplo, preservar o timbre mas trocar a frequência e duração, ou alterar a articulação e intensidade; expandir recursos sônicos: produzir sons inéditos através da interpolação de timbres (de 2 outros sons A e B), e mesmo a perversão da síntese aditiva, produzindo ilusões sônicas.

O uso da TW como ferramenta de análise e síntese alarga portanto este horizonte de novas aplicações.

A figura 15, a seguir, ilustra a representação gráfica (escalograma) de uma trecho musical cuja partitura se vê acima. Vale ressaltar que o escalograma mapeia frequências no tempo, assim com nas partituras musicais tradicionais.

A figura 16 mostra o escalograma de um ataque de clarineta, e a figura 17 mostra funções aproximando a evolução no tempo de 13 harmônicos diferentes (para síntese aditiva) de notas musicais D4 (ré) de trompetes. Note a complexidade e a variabilidade na evolução de cada harmônico neste ataque, que dura aproximadamente 0.20 segundo.

Fig. 15 - Escalograma de Trecho Musical, com partitura

Fig. 16 - Ataque de Clarineta (16ms)

Fig. 17 - Funções aproximando a evolução no tempo de 13 harmônicos de notas ré (D4) de trompetes (0.2 seg)

8- Perspectivas Futuras

A Transformada Wavelet é uma recente introdução no mundo do processamento de sinais, não estando ainda entre os "pesos pesados". Os métodos de Fourier são ferramentas clássicas na área, e após 20 anos de refinamentos, estes algoritmos ainda são melhorados.

Grupos como o MPEG (Motion Picture Expert Group) e outros estão incessantemente trabalhando na pesquisa e concepção de novos padrões de mercado para compressão de vídeo e sons. Um dos objetivos básicos é conseguir realizar descompressão e exibição em tempo real, se possível simultaneamente. Em 1991 uma competição promovida pelo MPEG no Japão para compressão de vídeo teve cerca de 30 companias participando com algoritmos. A maioria era baseado em transformada de cossenos, poucos em wavelets. Os melhores foram utilizando STFT.

As possibilidades no entanto são muito grandes para a penetração das wavelets: várias wavelets promissoras, como as bases de Wilson e Coiflets [STR93] são recentes e não entraram ainda em competições. No campo do hardware os primeiros chips comerciais estão sendo introduzidos. O MPEG ainda não viu tudo que as wavelets podem fazer.

"Em princípio as wavelets parecem mais indicadas para imagens e Fourier é a escolha melhor para música: imagens tem bordas agudas; música é senoidal" [STR93]. No entanto esta visão é dependente da aplicação, não devendo ser generalizada. Conforme vimos as possibilidades em aplicações sonoras estão em início de exploração.

Também quanto às regras de construção de wavelets, há muito o que definir. Wavelets não são a única construção alternativa à de Fourier, mas certamente abriram as portas para novas bases.

Aplicações em compressão de impressões digitais estão sendo utilizadas por exemplo no FBI - que possui um arquivo com mais de 30 milhões de impressões. A informação essencial em impressões digitais são as minúcias das margens e bifurcações. O padrão atual definido pelo JPEG (Joint Photographic Expert Group) é baseado em Fourier, 8 x 8 blocos, e as margens são quebradas. A compressão é essencial, e 20:1 é o objetivo. Há também uma demanda na escolha dos melhores coeficientes wavelets para codificação de dados.

Além das wavelets ortogonais, ainda existem as propostas de wavelets biortogonais e semi-ortogonais, com propriedades especiais vantajosas, dependendo da aplicação.

A necessidade de novos padrões industriais a serem estabelecidos para a televisão de alta definição (HDTV) e outros equipamentos eletrônicos vêm a estimular ainda mais a pesquisa nesta área.

Finalmente, com a teoria sendo difundida, novas técnicas que implementam transformadas wavelets vão sendo introduzidas. A exemplo, os correlatores ópticos usados para reconhecimento de padrões e processamento de imagens. Estes sistemas implementam transformadas de Fourier opticamente, portanto na velocidade da luz (em tempo real). Com o uso adequado de filtros ópticos pode-se implementar transformadas wavelets opticamente. Os horizontes são amplos, "de variadas escalas", e promissores.

9- Bibliografia

[RIO91] Rioul, O. e Vetterli, M. *Wavelets and Signal Processing*. IEEE Signal Processing Magazine, vol. 8, n_o. 4, outubro 91, pp 14-35.

[STR93] Strang, G. *Wavelet Transform versus Fourier Transform*. Bulletin of the American Mathematical Society, vol. 28, n_o 2, abril 93, pp 288-305.

[JAW94] Jawerth, B. e Sweldens, W. *An Overview of Wavelet based Multiresolution Analysis*. Artigo não publicado, disponível via Internet por FTP no Depto. Matemática, University of South Carolina, Columbia, SC, EUA (ftp.maxwell.math.scarolina.edu, arquivo /pub/imi_93/imi93_1.ps), 1994.

[WEI94] Weiss, L.G. *Wavelets and Wideband Correlation Processing*. IEEE Signal Processing Magazine, vol.11, n_o 1, janeiro 94, pp 13-32.

[COM88] Combes, J.M. e Grossmann, A. *Wavelets - Time-frequency Methods and Phase Space*. Proceedings of the International Conference, Marseille, França, dezembro 87. 2a. ed. , Springer Verlag, 1989, 331p.

[RIS88] Risset, J.C. *The Computer, Music and Sound Models*, in [COM88], pp 102-123.

[LAN91] Lancaster, D. *Understanding Transforms, Video-Compression Secrets, Video Crosshatch Generation, Power Electronic Resources and more breakthroughs* (seção Hardware Hacker), in Radio Electronics, julho 91, pp 68-73.

[VET92] Vetterli, M. e Herley, C. *Wavelets and Filter Banks: Theory and Design*. IEEE Transactions on Signal Processing, vol. 40, n_o 9, setembro 92, pp 2207-2232.

[MOT91] *Implementation of Fast Fourier Transform on Motorola's DSP 56000/56001 and DSP 96002. Digital Signal Processors*, by Guy R.L. Sohie (rev. 2). Motorola Inc., 1991. Manual Técnico.

[FRA69] Franks, L.E. *Signal Theory*. New Jersey, Prentice Hall, 1969, 317 p.

[PAP62] Papoulis, A. *The Fourier Integral and its Applications*. New York, McGraw Hill, 1962, 318 p.

[BRI74] Brigham, E.O. *The Fast Fourier Transform*. New Jersey, Prentice Hall, 1974, 252 p.

[OPP89] Oppenheim, A.V. e Schafer R.W. *Discrete-time Signal Processing*. New Jersey, Prentice Hall, 1989, 879 p.

[MAR88] Kronland-Martinet, R. *The Wavelet Transform for Analysis, Synthesis and Processing of Speech and Music Sounds*. Computer Music Journal, vol.12, n_o 4, 1988, pp 11-20.