IME – Universidade de São Paulo

Instituto de Matemática e Estatística

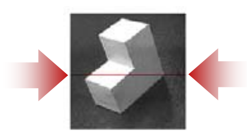
Introdução à Visão Computacional e ao Processamento de Imagens

João Kogler

Roberto Hirata

1º sem / 2008

Representação Espectral



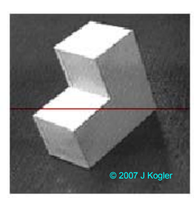
Por questão de simplicidade

Iniciaremos nossa investigação em 1D, utilizando uma linha individual da imagem.

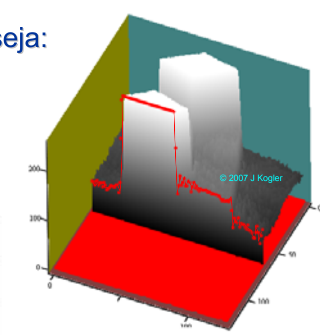
Depois, faremos a extensão para 2D.

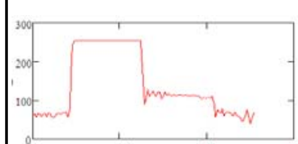
Comecemos tomando o perfil de intensidades sobre uma linha de varredura horizontal de uma image monocromática.

Representação Espectral

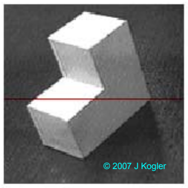


Ou seja:

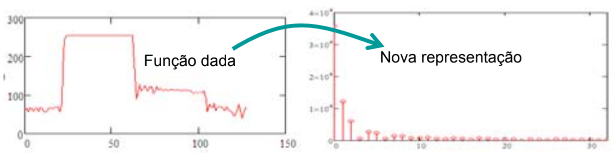




Representação Espectral



- Procuraremos uma representação para as intensidades, descritas pelo perfil, que nos revele informações ainda não evidentes
- O perfil pode ser visto como uma **função**, que mapeia intensidades em pontos do *domínio* (*suporte da linha da imagem → reta*)



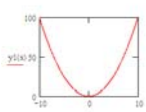
Representação Espectral

- Ou seja, o perfil de intensidades é uma função
- Vamos procurar representações que revelem informações de resolução e periodicidades associadas a essa função
- Discutamos um pouco sobre representação de funções
- Funções conhecidas têm nomes : seno, co-seno, exponencial, logaritmica, hiperbólicas, gama, zeta de Riemann, etc...
- Funções arbitrárias não têm nome, mas são aquelas que aparecem na natureza
- Funções conhecidas são modelos, com regras de construção conhecidas

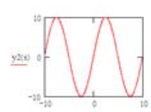
Representação de Funções

Funções conhecidas

$y = x^2$

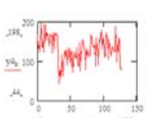


$y = A*\sin(\omega x)$



Fornecidas pelos nomes

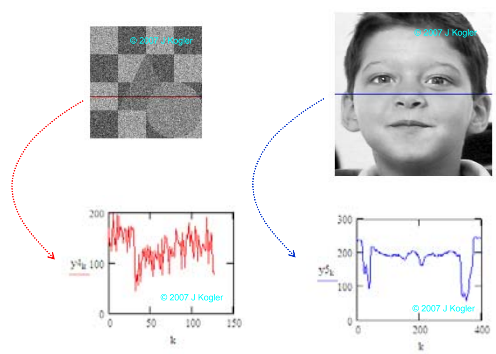
Funções arbitrárias



y4 =

	0
0	142
1	169
2	132
3	141
4	122
5	141
6	198
7	179
8	136
9	148
10	122
11	194
12	147
13	193
14	153
15	173

Fornecidas por tabelas



Funções arbitrárias

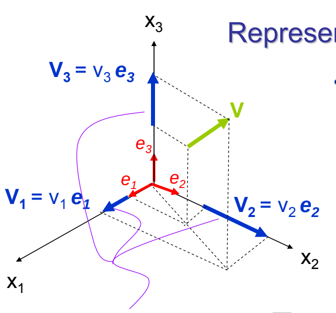
Representação de Funções

- Funções conhecidas podem ser especificadas de modo bastante sumário
    - **Poucos dados precisam ser fornecidos**
    - **Os demais são calculados a partir das especificações da função**
    - **São especificadas por um pequeno conjunto de parâmetros**
- Funções arbitrárias precisam ser descritas ponto a ponto
- Como obter uma nova representação de funções arbitrárias através de funções conhecidas ?
    - Resposta: conhecendo-se melhor o conjunto que contém todas as funções arbitrárias e as conhecidas
    - Estudando-se suas propriedades estruturais → estrutura algébrica

Representação de Funções

- Interessa-nos modelar o conjunto das funções que traduzem os perfis de intensidades
    - Os perfis são funções arbitrárias, porém bem comportadas
        - **Seus valores são limitados, não divergem em nenhum ponto**
        - **Qualquer soma finita dessas funções continuará a ser limitada ainda**
        - **Também o será seu produto por uma constante (escalar) finita**
- Consideremos os perfis de intensidades como funções contínuas, por ora
- Munido da estrutura de ser fechado sob a adição de dois elementos e sob a multiplicação por um escalar, o conjunto dos perfis apresenta a estrutra de **espaço vetorial**
    - Podemos portanto, aproveitar o que conhecemos dessa estrutura algébrica, para auxiliar na contrução de nova representação desejada

Representação de Funções



- Situação análoga: Representação de Vetores (geométricos)
    - Como obter uma representação de vetores arbitrários através de vetores conhecidos ?
    - Resposta:
        - **Através da decomposição do vetor arbitrário em um conjunto de vetores unitários ortogonais**
            - » Base ortonormal
            - » Nº de vetores da base = dimensão

$$V = \sum_k (v_k\, e_k)$$

coordenadas vetores da base

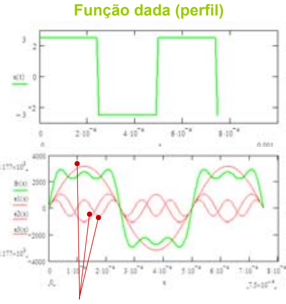
Representação de Funções

As componentes dessa representação são números complexos

Esta é uma das componentes

$$f1(x) = F_1\, e^{-j\,1\omega x}$$

Função dada (perfil)



Componentes da função

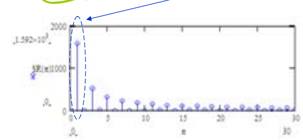


Gráfico das coordenadas (espectro)

$$f(x) = \sum_k (F_k\, e^{-j\,k\omega x})$$

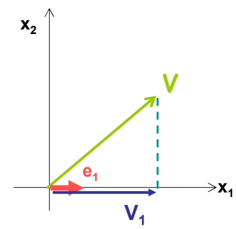
coordenadas vetores da base

Representação de Funções

- Analisando mais detalhadamente:
  - O conjunto dos perfis de intensidades (funções contínuas limitadas) constitui um espaço vetorial (sobre o corpo complexo)
  - Pode ser representado através da decomposição em uma base
  - O espaço vetorial acima é normado e podemos definir um produto interno
  - Os coeficientes da decomposição na base poderão ser obtidos através desse produto interno

Representação de Funções

- No caso dos vetores (geométricos):



$V_1 = v_1\, e_1$

$V_1 = v_1\, e_1$

componente

vetor da base

coordenada (coeficiente)

Produto escalar

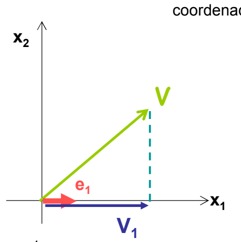
$v_1 = V \cdot e_1$

Representação de Funções

- Produto escalar = produto interno

coordenada

$v_1 = V \cdot e_1$



Regra do produto escalar de dois vetores:

$V \cdot U = \sum v_i u_i$

componente

$V_1 = v_1\, e_1$

A componente é a projeção de um vetor na direção do outro

Representação de Funções

- Os vetores que formam a base
  - São não-nulos
  - Têm módulo unitário (versores)
  - Formam um conjunto linearmente independente
    - **São ortogonais (ortonormais→ módulo unitário)**

$$e_i \cdot e_j = \delta_{ij}$$

  - **A quantidade de versores requeridos para formar a base é igual à <u>dimensão</u> do espaço a ser gerado por ela**

Representação de Funções

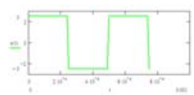
- No caso do espaço de funções
  - É um espaço de dimensão infinita
  - O número de funções na base será infinito também
  - As funções e(x) da base são tais que

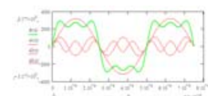
$$e_i(x) \cdot e_j(x) = \delta_{ij}$$

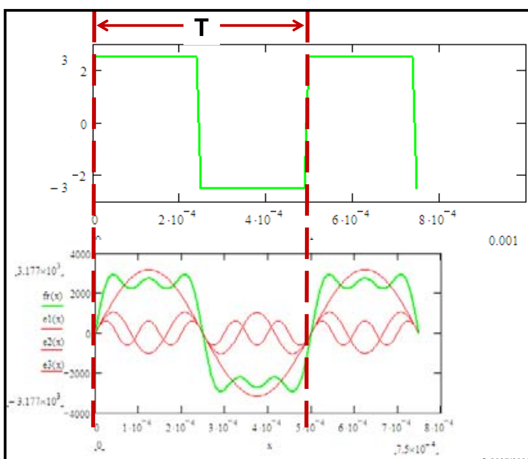
  - As funções trigonométricas sen($m\omega_0 x$) e cos($n\omega_0 x$), m,n = 1,2,..... podem constituir uma base para o espaço das funções

Representação de Funções

- As funções trigonométricas sen($m\omega_0 x$) e cos($n\omega_0 x$), m,n = 1,2,..... podem constituir uma base para o espaço das funções
- Consideremos apenas funções periódicas, por enquanto:
  - **Nesse caso, $\omega_0 = 2\pi / T$, sendo T o período da função a ser representada**
  - **Exemplo:**







Exercício (para casa)

- Demonstre que

$$sin(m\omega x) \bullet cos(n\omega x) = 0$$

$$sin(m\omega x) \bullet sin(n\omega x) = \delta_{mn}$$

$$cos(m\omega x) \bullet cos(n\omega x) = \delta_{mn}$$

sendo:

$$f(x) \bullet g(x) = \frac{2}{b-a} \int_a^b f(x) g(x) dx$$

para (a,b) = (0,T) em que T é o período $T = \frac{2\pi}{\omega}$

Representação de Funções

- De fato:
  - As funções trigonométricas sen(mωx) e cos(nωx), m,n = 1,2,..... formam um conjunto linearmente independente e ortonormal e podem constituir uma base para o espaço das funções com a seguinte regra de produto interno:

$$f(x) \bullet g(x) = \frac{2}{T}\int_0^T f(x)g(x)dx$$

sendo o período

$$T = \frac{2\pi}{\omega}$$

Série de Fourier

- É utilizada para representar funções periódicas
- Sua forma é:

$$A_0 + \sum_{k=1}^{\infty}(A_k cos(k\omega_0 x) + B_k sin(k\omega_0 x))$$

- Os coeficientes Ak e Bk são calculados pelo produto interno da função f(x) a ser representada, e cada componente da base, $cos(k\omega_0 x)$ e $sin(k\omega_0 x)$, respectivamente

$$A_k = \frac{2}{T}\int_0^T f(x)cos(k\omega_0 x)dx \quad B_k = \frac{2}{T}\int_0^T f(x)sin(k\omega_0 x)dx$$

Série de Fourier

$$f(x) = A_0 + \sum_{k=1}^{\infty}(A_k cos(k\omega_0 x) + B_k sin(k\omega_0 x))$$

$$A_k = \frac{2}{T}\int_0^T f(x)cos(k\omega_0 x)dx \quad B_k = \frac{2}{T}\int_0^T f(x)sin(k\omega_0 x)dx$$

- O coeficiente A0 é proporcional ao valor médio da função no seu período T

$$A_0 = \frac{2}{T}\int_0^T f(x)dx \qquad T = \frac{2\pi}{\omega_0}$$

- Note que estamos ainda considerando f(x) periódica.

Representação complexa

- A série de Fourier pode ser representada por uma série de exponenciais complexas, lançando-se mão das relações de Euler:

$$\rho cos(k\omega x) + j\rho sin(k\omega x) = \rho e^{jk\omega x}$$

$$cos(k\omega x) = \frac{e^{jk\omega x} + e^{-jk\omega x}}{2}$$

$$sin(k\omega x) = \frac{e^{jk\omega x} - e^{-jk\omega x}}{2j}$$

Representação complexa

- A somatória da expressão da série trigonométrica de Fourier pode ser re-escrito

$$f(x) = \frac{A_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} +(\underbrace{\frac{A_k}{2}(e^{jk\omega_0 x} + e^{-jk\omega_0 x})}_{A_k cos(k\omega_0 x)} + \underbrace{\frac{B_k}{2j}(e^{jk\omega_0 x} - e^{-jk\omega_0 x})}_{B_k sin(k\omega_0 x)})$$

- Ou, ainda

$$f(x) = \frac{A_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} +(\frac{A_k - jB_k}{2} e^{jk\omega_0 x} + \frac{A_k + jB_k}{2} e^{-jk\omega_0 x})$$

Representação complexa

$$f(x) = \frac{A_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} +(\frac{A_k - jB_k}{2} e^{jk\omega_0 x} + \frac{A_k + B_k}{2} e^{-jk\omega_0 x})$$

- Definindo-se

$$C_0 = \frac{A_0}{2} \qquad C_k = \frac{A_k - jB_k}{2} \qquad C_{-k} = \frac{A_k + jB_k}{2}$$

- vem:

$$f(x) = C_0 + \sum_{k=1}^{\infty} (C_k e^{jk\omega_0 x} + C_{-k} e^{-jk\omega_0 x})$$

- ou,ainda:

$$f(x) = C_0 + \sum_{k=1}^{\infty} C_k e^{jk\omega_0 x} + \sum_{k=-1}^{-\infty} C_k e^{jk\omega_0 x}$$

Representação complexa

- Resulta, então, a forma complexa da série de Fourier:

$$f(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} C_k e^{jk\omega_0 x}$$

- Deduz-se facilmente que:

$$C_k = \frac{1}{T} \int_0^T f(x) e^{-jk\omega_0 x} dx$$

- Exercício: deduza a expressão de C_k